Minkowski の不等式

$p \geqq 1$ に対して，p 乗絶対可積分関数 $f(x)$, $g(x)$ と α, β $(-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq \infty)$ に対し $f(x)+g(x)$ も p 乗絶対可積分で

$$\left(\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ.

証明. $p=1$ の場合と $p>1$ の場合に分けて証明を行う.

（ i ）$p=1$ の場合　三角不等式から $|f(x)+g(x)| \leqq |f(x)|+|g(x)|$ であることがわかるから，あとは両辺を $[\alpha, \beta]$ 上で積分すればよい.

（ii）$p>1$ の場合　$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす $q>1$ に対して，三角不等式と Hölder の不等式を用いると

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p\,dx &\leqq \int_\alpha^\beta (|f(x)|+|g(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\ &\leqq \left\{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\left(\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. ここで $q(p-1)=p$, $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$ であることに注意し，$\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p\,dx \fallingdotseq 0$（$=0$ のときは明らかに不等式が成り立つ）のとき $\left(\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$ で両辺を割ると，示す不等式が得られる.

以上より，Minkowski の不等式が示された. ■